Lecture5_CN

第五讲：朗斯基行列式、降阶法与欧拉方程

知识总结

概念	关键公式 / 方法
朗斯基行列式	$W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$
基本解组	在某点 $W \neq 0 \Rightarrow$ 解线性无关
阿贝尔定理	$W(t) = c \cdot e^{-\int p(t)\,dt}$
降阶法	代换 $y = v(t) \cdot y_1(t)$ 求第二解
欧拉方程	代换 $y = x^r$，解特征方程 $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$

---

1. 朗斯基行列式

考虑二阶线性齐次 ODE：

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

定义（朗斯基行列式）

两个解 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的朗斯基行列式定义为：

$$W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

$$W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Theorem (Thm 3.2.3)

Suppose that y_1 and y_2 are two solutions of the equation $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ with initial conditions $y(t_0) = y_0$ and $y'(t_0) = y_0'$, where $p(t)$ and $q(t)$ are continuous on an interval that contains t_0. Then it is always possible to choose constants c_1 and c_2 so that $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ satisfies the initial value problem if and only if $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$.

说明： 此定理指出，若在某点 t_0 朗斯基行列式非零，则我们总能找到常数 c_1 和 c_2 使得线性组合 $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ 满足 t_0 处的任意给定初始条件。

Theorem

The functions y_1, y_2 are **fundamental set of solutions** *for an equation $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ if they are two solutions $y_1(t)$ and $y_2(t)$ such that there exists a t_0 such that $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$.*

说明： 两个解构成 **基本解组**（从而张成所有可能的解）当且仅当它们的朗斯基行列式在区间某点非零。这等价于说解是线性无关的。

提示：检验基本解组