Lecture11_CN

第十一讲：线性微分方程组（矩阵方法）

知识总结

概念	关键公式 / 方法
标准型	$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
互异实特征值	$\mathbf{x}(t) = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{\lambda_n t}$
重特征值（亏损）	$\mathbf{x}(t) = c_1\boldsymbol{\xi}_1 e^{\lambda t} + c_2(\boldsymbol{\xi}_1 t + \boldsymbol{\xi}_2)e^{\lambda t}$，其中 $(A-\lambda I)\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_1$
共轭复特征值	$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t) + c_2 e^{\alpha t}(\mathbf{a}\sin\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t)$
基解矩阵	$\Phi(t) = [\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{\lambda_n t}]$
非齐次方程组	$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$，常数变易法：$\mathbf{x}_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt$

1. 标准形式与解的结构

常系数线性微分方程组可以写成：

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$（或 $\mathbb{C}^n$）是未知向量函数，A 是 $n \times n$ 常系数矩阵。

叠加原理

若 $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ 是 A 的特征向量，对应的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则：

$$\mathbf{x}(t) = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{\lambda_n t}$$

构成通解。

基解矩阵

基解矩阵 $\Phi(t)$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，其列向量是线性无关的解：

$$\Phi(t) = \left[\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\lambda_1 t},\ \boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ \boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{\lambda_n t}\right]$$

通解可简洁地写为 $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$，其中 $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$。