第八章 矢量代数与空间解析几何 ($\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$)

一、向量的积

数量积（点积/内积）：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，$(\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2)$ 数

讨论是否垂直

当 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 时 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

不满足消去律，结合律

向量积（外积/叉积）：$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ （$\vec{a}\times\vec{a}=0$）向量

当 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 时，$\vec{a}\times\vec{b}=0$ 是否平行

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ 叉积可得垂直向量

$|\vec{a}\times\vec{b}|=S_{\square}$ 所围面积

混合积：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[abc]$ 一个值 $=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

$V=|[abc]|$ 平行六面体体积（四面体为$\frac{1}{6}$）

轮换性 $[abc]=[bca]=[cab]$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面时 $\Leftrightarrow[abc]=0$ 讨论向量是否共面

二、平面与直线

平面方程

点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$

一般式：$Ax+By+Cz+D=0$，$D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

平面过原点 $\Rightarrow D=0$，平面过 x 轴 $\Rightarrow A=D=0$，平面平行于 x 轴 $\Rightarrow A=0$

截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$（$a,b,c$ 分别为截距）

xOy 面 $\Rightarrow A=B=0$

三点式：$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$，$M_i(x_i,y_i,z_i)$ 为平面上的点

$\Rightarrow$ 参数式有 2 个参变量

直线方程

点向式：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，方向向量 $\vec{s}=\{l,m,n\}$

参数式：$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$ 均与方向向量 $\vec{s}$ 有关

一般式：（两平面交线）$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ $\vec{s}=\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}$

两点式：$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$，$\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$

题型 ① 求投影直线（平面束）

② 求公垂线

法1 $\vec{s}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}$

$\vec{n_1}=\vec{s_1}\times(\vec{s_1}\times\vec{s_2})$

$\vec{n_2}=\vec{s_2}\times(\vec{s_1}\times\vec{s_2})$

法2 参数定 t_1,t_2

垂直解 t_1,t_2

三、距离问题

1. 点到平面：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

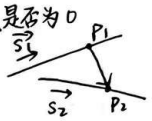
2. 点到直线：$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$

3. 平行平面：$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

4. 异面直线距离：$\frac{V_{混合}}{S_{底}}=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}\vec{s_1}\vec{s_2}]|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$

四、直线与直线的相互关系

异面/共面 $\Rightarrow$ 混合积是否为 0



共面：$[\vec{s_1}\ \vec{s_2}\ \overrightarrow{P_1P_2}]=0$

相交：$\cos\varphi=\frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$

平行：$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

垂直：$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

五、平面与平面的相互关系

相交（垂直）$\vec{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ $\vec{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$

$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

平行：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

六、直线与平面关系

夹角：$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ $\left(\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}\right)$

垂直：$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$（$\vec{n}\parallel\vec{s}$）

平行：$Al+Bm+Cn=0$，$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$ $(x_0,y_0,z_0)\in L$

属于：$Al+Bm+Cn=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

△平面束方程（注意漏解）

$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\eta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

七、曲面与曲线

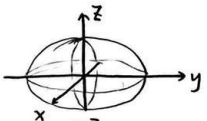
1. 曲面
   - 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$
   - 旋转曲面 $\xrightarrow{\text{特}}$ 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(z^2=x^2+y^2)$
   - 柱面（三变量缺一）
     - 准线：定直线
     - 母线：动直线每一位置
   - 曲面参数方程

2. 曲线
   - 一般式 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$
   - 参数式 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$
   - 曲线投影，以xOy面为例

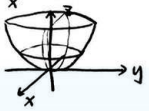
$$\begin{cases} H(x,y)=0 & (F,G\text{消去}z\text{得}) \\ z=0 \end{cases}$$

3. 二次曲面

(1) 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



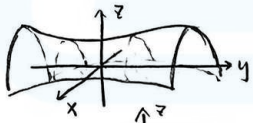
(2) 椭圆抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



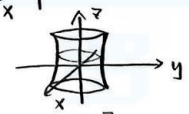
(3) 椭圆锥：$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

(4) 双曲抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

特 $z=xy$

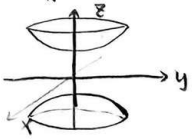


(5) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



(6) 双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1)$



rednote ID: 349196475