

第八章 向量代数与空间解析几何

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1)$$

一. 向量的积

数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ $(\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2)$ 数
 点积 当 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 时 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 讨论是否垂直
 内积 不满足消去律, 结合律

向量积 $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ $(\vec{a} \times \vec{a} = 0)$ 向量
 外积 当 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 时, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 是否平行
 叉积 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ 叉积可得垂直向量
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\Delta}$ 所围面积

混合积 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$ 一个值 $= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
 $V = |[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]|$ 平行六面体体积 (四面体为 $\frac{1}{6}$)
 轮换性 $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = [\vec{b} \vec{c} \vec{a}] = [\vec{c} \vec{a} \vec{b}]$
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面时 $\Leftrightarrow [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$ 讨论向量是否共面

四. 直线与直线的相互关系

异面/共面 $\Rightarrow$ 混合积是否为 0
 共面: $[\vec{s}_1 \vec{s}_2 \vec{P}_1 \vec{P}_2] = 0$

相交: $\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$
 平行: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

垂直: $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

五. 平面与平面的相互关系

相交 (垂直) $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$
 $\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
 平行: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

二. 平面与直线

平面方程 $\begin{cases}$ 点法式: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$, 法向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$
 一般式: $Ax + By + Cz + D = 0$, $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$
 平面过原点 $\Rightarrow D = 0$, 平面过 x 轴 $\Rightarrow A = D = 0$, 平面平行于 x 轴 $\Rightarrow A = 0$
 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (a, b, c 分别为截距) xoy 面 $\Rightarrow A = B = 0$
 三点式: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$, $M_i(x_i, y_i, z_i)$ 为平面上点
 $\Rightarrow$ 参数式有 2 个参考量

直线方程 $\begin{cases}$ 点向式: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$, 方向向量 $\vec{s} = \{l, m, n\}$ 题型 ① 求投影直线 (平面束)
 参数式: $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ 均与方向向量 $\vec{s}$ 有关 ② 求公垂线
 一般式: (两平面交线) $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$ $\vec{s} = \{A_1, B_1, C_1\} \times \{A_2, B_2, C_2\}$
 两式: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, $\vec{s} = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2$ 法 1: $\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$
 法 2: 参数定 t_1, t_2 垂直解 t_1, t_2

三. 距离问题

1. 点到平面: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

2. 点到直线: $d = \frac{|\vec{P}_1 \vec{P}_0 \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$

3. 平行平面: $d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

4. 异面直线距离: $\frac{|\vec{P}_1 \vec{P}_2 \cdot \vec{s}|}{|\vec{s}|}$ 直线与平面关系 $\frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|}$ Δ 平面束方程 (注意漏解)

夹角: $\sin \varphi = \frac{|A_1 l + B_1 m + C_1 n|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$ ($A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$)
 $+ n(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$

垂直: $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ ($\vec{n} \parallel \vec{s}$)

平行: $Al + Bm + Cn = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$
 $(x_0, y_0, z_0) \in L$

属于 L : $Al + Bm + Cn = 0$ 且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

七. 曲面与曲线

1. 曲面
- 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
 - 旋转曲面 $\rightarrow$ 圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
特 $(z^2 = x^2 + y^2)$
 - 柱面 (三变量缺一) $\begin{cases} \text{准线: 定直线} \\ \text{母线: 动直线每一位置} \end{cases}$
 - 曲面参数方程

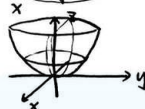
2. 曲线
- 一般式 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$
 - 参数式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$
 - 曲线投影, 以 xOy 面为例
 $\begin{cases} H(x, y) = 0 \quad (F, G \text{ 消去 } z \text{ 得}) \\ z = 0 \end{cases}$

3. 二次曲面

(1) 椭球面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



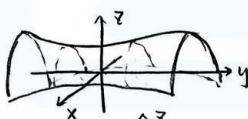
(2) 椭圆抛物面: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



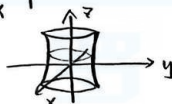
(3) 椭圆锥: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

(4) 双曲抛物面: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

特 $z = xy$



(5) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



(6) 双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1)$

